



OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO DE AÇÕES DO IBOVESPA: UMA COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR E PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

João Victor Soares do Amaral (UNIFEI)
joao.victoramaryl96@hotmail.com

Gustavo dos Santos Leal (UNIFEI)
gsleal@outlook.com

Gabriel Fernandes de Oliveira
gabrieelfoliveira@gmail.com

José Arnaldo Barra Montevechi (UNIFEI)
montevechi@unifei.edu.br

Pedro Paulo Balestrassi (UNIFEI)
pedro@unifei.edu.br

Este trabalho possui como objetivo a aplicação de técnicas de otimização linear e não linear em problemas de programação matemática para seleção de ativos para comporem um portfólio de investimentos. Foram analisadas as 20 ações mais negociadas no Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA) às quais aplicou-se dois modelos: um de programação não linear fracionária, tendo como objetivo maximizar o retorno sobre o risco; um de programação linear objetivando a maximização do retorno em si, fixando o limite máximo tolerado para a variância. Com os resultados obtidos, observa-se que o modelo baseado em programação não linear proporcionou maior diversificação da carteira, reduzindo o risco associado e obtendo um rendimento aproximado ao encontrado pela programação linear.

Palavras-chave: Otimização, Carteira de Investimentos, Programação Linear, Programação Não Linear.

1. Introdução

A atividade econômica consiste em alocar recursos escassos para satisfazer necessidades infinitas (MANKIW, 2009). Desta forma, alocar recursos no mercado de ações consiste em área de interesse para a Engenharia de Produção (BELFIORE; FÁVERO, 2013). A teoria estruturada de otimização de portfólio foi proposta por Markovitz (1952) cuja ideia é determinar quais investimentos financeiros retornam o maior retorno e que apresentam o menor risco possível. Este risco pode ser calculado pela variância dos retornos dos ativos analisados, que são determinados por meio da soma das variâncias de cada ativo e das suas respectivas covariâncias (ROSS, WESTERFIELD; JORDAN, 2008).

A Pesquisa Operacional (PO) pode ser uma ferramenta útil para contribuir para a tomada de decisão de quais ações irão compor uma carteira de investimentos. A PO pode ser descrita como um conjunto de técnicas de métodos quantitativos que visa auxiliar os agentes, sejam organizações ou pessoas, a tomarem decisões racionais quanto à resolução de emprego dos recursos escassos (HILLIER; LIEBERMAN, 2013). Segundo Colin (2013) os técnicos de Pesquisa Operacional devem se preocupar constantemente com modelos de otimização e orientados às aplicações práticas do cotidiano.

De acordo com Belfiore e Fávero (2013) algumas técnicas utilizadas em Pesquisa Operacional são: Programação Linear (PL), Programação Não Linear (PNL), Programação Inteira, Programação de Redes, Programação Multiobjetivo, Programação Dinâmica, Teoria das Filas, Simulação, Teoria dos Jogos, Análise por Envoltória de Dados etc.

Desta maneira, este trabalho objetiva a aplicação e comparação de técnicas de Programação Linear e Programação Não Linear com restrições na otimização da escolha de ações do Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA) na constituição de um portfólio que otimize o retorno, entre abril de 2017 e abril de 2019 das vinte ações mais negociadas do índice em questão.

2. Referencial teórico

A pesquisa operacional é uma ciência apoiada em modelos destinados a programar e coordenar as operações de uma organização, analisando as variáveis e restrições de problemas reais a fim de se encontrar uma solução que atinja determinado objetivo (HILLER; LIBERMAN, 2006). Pessoa e Alves (2013) e Santos (2016) concordam que esta ciência apresenta um caráter multidisciplinar em que suas aplicações se estendem da engenharia à medicina, passando pela economia à gestão empresarial.

A PO se desenvolveu na Inglaterra durante a Segunda Guerra Mundial, derivada da necessidade de resolver problemas que envolviam grandes dimensões e complexidade, como logística, estratégia militar, utilização eficaz de recursos, dentre outros. Neste período foram criados grupos multidisciplinares, envolvendo físicos, matemáticos, engenheiros e cientistas sociais, com o intuito de estudar e solucionar estes problemas operacionais enfrentados durante a Guerra (RAYMUNDO; GONÇALVES; RIBEIRO, 2015; PESSOA; ALVES, 2013; MARTÍN, 2003; ACKOFF; SASIENI, 1977).

Segundo Bressan e Zebediff (2015) a PO é caracterizada por algoritmos e técnicas que visam estruturar e solucionar modelos quantitativos que podem ser expressos matematicamente. Estes são estruturados de forma lógica a fim de determinar as melhores condições de funcionamento para os sistemas representados. As suas técnicas de solução se reúnem em subáreas, nas quais podemos destacar a Programação Linear e Programação Não-Linear.

Para Coutinho e Silva (2013, p. 28):

A Programação Linear (PL), uma das técnicas utilizadas na Pesquisa Operacional (PO), é um método que busca achar a solução ótima de problemas que podem possuir muitas soluções. Para chegar ao resultado, são realizadas iterações sucessivas de matrizes relacionando as variáveis do modelo, de modo a maximizar ou minimizar o valor de uma função linear.

O objetivo principal da PL é encontrar a melhor solução possível, ou seja, a chamada solução ótima. Consiste na maximização ou minimização da Função Objetivo, em respeito a um conjunto de restrições expressas em forma de igualdades ou desigualdades, gerando assim um sistema linear que pode ser resolvido pelo método Simplex (MARINS, 2011).

Neste contexto, Prado (1999) afirma que as técnicas de programação linear são aplicadas nas mais diversas áreas, tais como:

- Formulação de alimentos, rações e adubos;
- Blendagem de ligas metálicas e petróleo;
- Transporte;
- Localização industrial;
- Carteira de ações (Investimentos);
- Alocação de recursos em fábricas, fazendas, escritórios, etc;
- Designação de pessoas e tarefas (Composição de tabelas de horários);
- Corte de barras e chapas.

Todavia, nem sempre o pressuposto da linearidade entre as variáveis é atendido. Apesar dos parâmetros dos modelos não lineares serem os mesmos de modelos lineares a diferença consiste nos procedimentos matemáticos e computacionais a serem aplicados na resolução do modelo (MINEIRO, 2007).

Problemas desta natureza são objeto de estudo da Programação Não Linear, sendo sua resolução considerada mais difícil do que para modelos de PL, que quando encontrada pode não necessariamente ser a melhor (mínimo ou máximo local). Segundo Corrar (2004) um método para resolução de Problemas de PNL é o Generalized Reduced Gradient (GRG) que consiste em estimar uma solução viável inicial, encontrar um ponto na direção de maior inclinação e continuar o algoritmo até que não haja melhora significativa na função objetivo.

3. Método de pesquisa

Para este estudo foram coletados dados correspondentes ao retorno das vinte ações mais negociadas do índice IBOVESPA entre abril de 2017 e abril de 2019. Todavia, houve problemas com a coleta de uma variável, sobrando 19 ações. Com o intuito de comparação, foram aplicados dois modelos, um de Programação Não Linear e um de Programação Linear, apresentados no tópico 4. Posteriormente realizou-se a análise econômica e de sensibilidade para a solução do modelo de PL.

As 19 ações selecionadas foram: PETR4 (Petrobrás); ITUB4 (Itaú Unibanco); VALE3 (VALE); BBDC4 (Bradesco); ABEV3 (AMBEV); BBAS3 (Banco do Brasil); CIEL3 (CIELO); ITSA4 (Itaú); KROT (Kroton); BRFS3 (BRF); PETR3 (Petrobrás); GGBR4 (Gerdau); BBSE3 (BB Seguridade); USIM5 (Usiminas); JBSS3 (JBS); CCR03 (CCR); UGPA3 (Ultrapar); LREN3 (Lojas Renner); LAME4 (Lojas Americanas). A ação BVMF3 (BM&F Bovespa) foi excluída por apresentar problemas como dados faltantes. O software utilizado para a modelagem foi o Solver do MS Excel 2016.

4. Formulação matemática do problema

Segundo Montevechi (2016), para se formular um problema de programação matemática com restrições, devem-se seguir os seguintes passos: definição das variáveis de decisão, definição da função objetivo, definição das restrições, definição das restrições adicionais e resumo do modelo. Primeiramente será apresentada a formulação do problema de programação linear para, posteriormente ser apresentada a formulação do problema de programação não linear.

As estatísticas descritivas de cada ação selecionada encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1 - Estatística Descritiva da Variação de Retorno das Ações

Código	Empresa	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Q1	Mediana	Q3	Máximo
BBSE3	BB Seguridade	0,0351	1,5802	-10,23	-0,91	0,03	0,93	4,35
BRFS3	BRF SA	-0,017	2,5880	-19,75	-1,43	-0,09	1,34	12,28
CIEL3	Cielo SA	-0,1700	2,436	-9,75	-1,50	-0,24	1,14	9,48
GGBR4	Gerdau SA	0,1170	2,448	-12,02	-1,47	0,00	1,66	8,16
ITSA4	Investimentos Itaú SA	0,1134	1,9358	-9,63	-0,94	0,00	1,14	13,57
KROT3	Kroton	-0,034	2,7000	-15,21	-1,61	-0,20	1,54	9,56
PETR3	Petrobrás SA	0,1900	2,6010	-14,92	-1,05	0,19	1,55	12,38
UGPA3	Utrapar	-0,0767	2,0987	-10,16	-1,16	-0,04	1,06	8,68
USIM5	Usiminas SA	0,2090	3,2070	-16,14	-1,6	0,00	2,06	10,86
CCR03	CCR SA	-0,0220	2,3270	-14,29	-1,33	0,00	1,21	11,17
LREN3	Lojas Renner SA	0,1372	2,0295	-7,75	-1,10	0,04	1,35	8,49
JBSS3	JBS SA	0,1910	3,2930	-31,34	-1,74	0,11	1,89	22,54
LAME4	Lojas Americanas SA	0,0058	2,1954	-15,34	-1,27	0,06	1,29	7,36
ABEV3	Ambev SA	0,0217	1,3700	-6,15	-0,67	0,00	0,71	5,24
BBAS3	Banco do Brasil SA	0,1330	2,5140	-19,91	-1,19	0,14	1,45	11,41
BBDC4	Bank Bradesco SA	0,1211	1,9126	-13,11	-1,04	0,08	1,16	6,78
ITUB4	Itaú Unibanco	0,0910	1,7554	-12,05	-0,88	0,11	1,11	5,95
PETR4	Petrobrás SA	0,1870	2,8180	-15,76	-1,23	0,14	1,58	14,13
VALE3	Vale SA	0,1660	2,3350	-24,52	-1,00	0,17	1,54	9,03

Fonte: Elaboração própria.

4.1. Formulação matemática por programação linear

A fim de otimizar o retorno obtido pela carteira, o modelo auxilia ao investidor a decidir a porcentagem do capital a ser investido em cada ação, dado por x_j , com $j = 1, \dots, 19$. Visto isto, o modelo de PL pode ser representado matematicamente equações a seguir:

$$\max E(R) = \sum_{j=1}^n r_j x_j \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1 \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n \sigma_j x_j \leq \sigma_{\text{médio}} \quad (3)$$

$$x_j \leq 0,5 \quad (4)$$

$$x_j \geq 0 \quad (5)$$

Sendo:

$E(R)$ = retorno esperado da carteira de investimento;

r_j = retorno esperado do ativo j , para $j = 1, \dots, 19$;

$\sigma_{médio}$ = risco médio das ações;

σ_j = risco associado a ação j .

A Eq. (1) representa a função objetivo, a qual visa a maximização do retorno obtido com a carteira. A restrição expressa pela Eq. (2) indica que o somatório das porcentagens investidas em cada ação deve ser igual a 100%. As Eq. (3) e Eq. (4) restringem o risco da carteira ao risco médio das ações estudadas e ao limite de investimento individual de no máximo 50%, respectivamente. Além disto a Eq. (5) apresenta as restrições adicionais do modelo.

4.2. Formulação do Problema por Programação não Linear

Diferentemente do modelo representado por PL, a formulação a seguir visa maximizar a relação retorno/risco da carteira, assim como sugerido por Markovitz (1952) e expresso na função objetivo Eq. (6). As Eq. (7) e Eq. (8) apresentam, respectivamente, que o somatório dos investimentos deve ser igual a 100% do valor disponível e a diversificação da carteira pela limitação de investimento em cada ação de 50% no máximo.

$$\max Z = \sum_{j=1}^n x_j r_j / \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i x_j COV_{ij} \right)^{1/2} \quad (6)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1 \quad (7)$$

$$x_j \leq 0,5 \quad (8)$$

$$x_j \geq 0 \quad (9)$$

Sendo:

Z = relação retorno/risco média esperada da carteira;

x_j = proporção do valor total da carteira aplicada no ativo financeiro j ;

r_j = retorno do ativo financeiro j ;

COV_{ij} = Covariância entre o ativo financeiro i e o ativo financeiro j , com $i, j = 1, \dots, 19$.

5. Resultados e Discussões

5.1. Resultados da Programação Linear

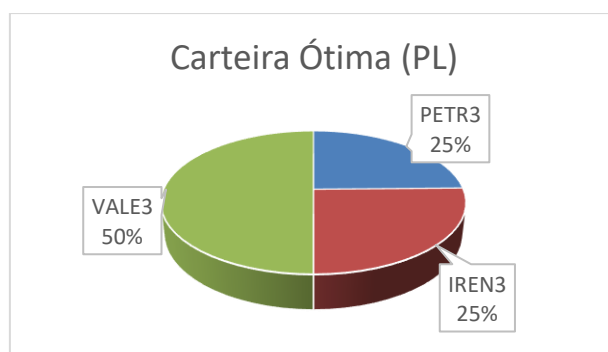
Após a implementação foi gerado a carteira ótima que maximizasse o retorno e respeitasse as restrições impostas através do modelo de PL apresentado na seção anterior. A solução é apresentada na Tabela 2, sendo as ações escolhidas para o portfólio os ativos da Petrobras SA, Lojas Renner e Vale SA, levando a um retorno de 0,1646% ao dia. A carteira ótima está elencada na Tabela 2 e Figura 5 a seguir.

Tabela 2 - Portfólio ótimo calculado por Programação Linear

Ação	Participação na Carteira (%)	Custo Reduzido	Limite Inferior	Limite superior
BBSE3	0,00%	-0,0606	-∞	0,0957
BRFS3	0,00%	-0,2059	-∞	0,1889
CIEL3	0,00%	-0,3447	-∞	0,1747
GGBR4	0,00%	-0,0589	-∞	0,1759
ITSA4	0,00%	-0,0151	-∞	0,1285
KROT3	0,00%	-0,2332	-∞	0,1992
PETR3	24,71%	0,0000	0,1732	0,1910
UGPA3	0,00%	-0,2203	-∞	0,1436
USIM5	0,00%	-0,0371	-∞	0,2461
CCR03.	0,00%	-0,1867	-∞	0,1647
LREN3	25,28%	0,0000	0,1328	0,1384
JBSS3	0,00%	-0,0630	-∞	0,2540
LAME4	0,00%	-0,1467	-∞	0,1525
ABEV3	0,00%	-0,0545	-∞	0,0762
BBAS3	0,00%	-0,0490	-∞	0,1820
BBDC4	0,00%	-0,0053	-∞	0,1264
ITUB4	0,00%	-0,0209	-∞	0,1119
PETR4	0,00%	-0,0231	-∞	0,2101
VALE3	50,00%	0,0006	0,1654	∞
Função Objetivo			0,1646% ao dia	

Fonte: elaboração própria.

Figura 1 - Carteira ótima pelo método PL



Fonte: Elaboração própria

5.1.1. Análise econômica

A análise econômica permeia os coeficientes do lado direito das restrições, sendo possível assim analisar o quando se obteria de acréscimo ou redução na função objetivo caso a respectiva restrição aumentasse ou diminuísse. Os dados gerados pelo relatório do Solver são apresentados na Tabela 3 abaixo.

Tabela 3: Análise de Sensibilidade para Restrições Lineares

Nome	Valor	Preço Sombra	Restrição Lateral R.H.	Limite Inferior	Limite Superior
BBSE3 Limite	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	∞
BRFS3 Limite	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	∞
CIEL3 Limite	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	∞
GGBR4 Limite	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	∞
ITSA4 Limite	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	∞
KROT3 Limite	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	∞
PETR3 Limite	0,2471	0,0000	0,5000	0,2471	∞
UGPA3 Limite	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	∞
USIM5 Limite	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	∞
CCR03 Limite	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	∞
LREN3 Limite	0,2529	0,0000	0,5000	0,2529	∞
JBSS3 Limite	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	∞
LAME4 Limite	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	∞
ABEV3 Limite	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	∞
BBAS3 Limite	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	∞
BBDC4 Limite	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	∞
ITUB4 Limite	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	∞
PETR4 Limite	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	∞
VALE3 Limite	0,5000	0,0006	0,5000	0,0273	0,9620
Total Investido	1,0000	-0,0504	1	0,0542	0,0555
Desvio Padrão	2,3234	0,0925	2,3233	2,1822	2,4677

Fonte: elaboração própria.

Primeiramente foi realizada a análise para as restrições de limite máximo permitido para se investir em cada ativo. Observa-se que para os ativos que não fazem parte da carteira ótima, e também para as ações de LREM3 e PETR4, o aumento ou decréscimo no máximo permitido, atualmente 50%, não impactaria na função objetivo. Todavia para a ação VALE3, o limite de 50% restringe o aumento da função objetivo, sendo que para ponto percentual a mais ou a menos que se aceitar investir nesta empresa a rentabilidade será acrescida ou decrescida em 0,0006%.

Outra restrição que limita o crescimento da função objetivo é o risco aceitável para a carteira, a cada ponto a mais ou a menos no desvio padrão impacta em 0,0925 na rentabilidade, isto é dado pelo trade-off retorno x risco, pois quanto mais estou disposto a arriscar mais rentabilidade minha carteira possui. Já para restrição de total investido esta análise não se aplica, uma vez que a somatória dos investimentos da carteira necessariamente deve ser 100%.

5.1.2. Análise de Sensibilidade

A análise de sensibilidade permite saber o quando a mudança dos coeficientes da função objetivo e do lado direito das restrições podem variar para manter-se a solução ótima corrente. Segue a análise para os coeficientes do modelo:

- Função Objetivo – Para que a solução se manterá caso a rentabilidade de cada ação varie segundo a faixa mostrada abaixo:
 - $-\infty < r_{BBSE3} < 0,0957$;
 - $-\infty < r_{BRFS3} < 0,1889$;
 - $-\infty < r_{CIELO} < 0,1747$;
 - $-\infty < r_{GGBR4} < 0,1759$;
 - $-\infty < r_{ITSA4} < 0,1285$;
 - $-\infty < r_{KROT3} < 0,1992$;
 - $0,1732 < r_{PETR3} < 0,1910$;
 - $-\infty < r_{UGPA3} < 0,1436$;
 - $-\infty < r_{USIM5} < 0,2461$;
 - $-\infty < r_{CCRO3} < 0,1647$;
 - $0,1328 < r_{LREN3} < 0,1384$;
 - $-\infty < r_{JBSS3} < 0,2540$;
 - $-\infty < r_{LAME4} < 0,1525$;
 - $-\infty < r_{ABEV3} < 0,0762$;
 - $-\infty < r_{BBAS3} < 0,1820$;
 - $-\infty < r_{BBDC4} < 0,1264$;
 - $-\infty < r_{ITUB4} < 0,1119$;
 - $-\infty < r_{PETR4} < 0,2101$;
 - $0,1654 < r_{Vale3} < 0,9620$.

- Restrição – Neste caso, para que as ações selecionadas permaneçam as mesmas os coeficientes do lado direito das restrições devem se manter dentro da faixa especificada a seguir. Os coeficientes não elencados abaixo podem variar indefinidamente que não influenciam na solução.
 - $0,2471 < LIM_{PETR3} < \infty$;
 - $0,2529 < LIM_{IREN3} < \infty$;
 - $0,0273 < LIM_{VALE3} < \infty$;
 - $2,1822 < \sigma < 2,4677$.

5.2. Resultados da Programação Não Linear

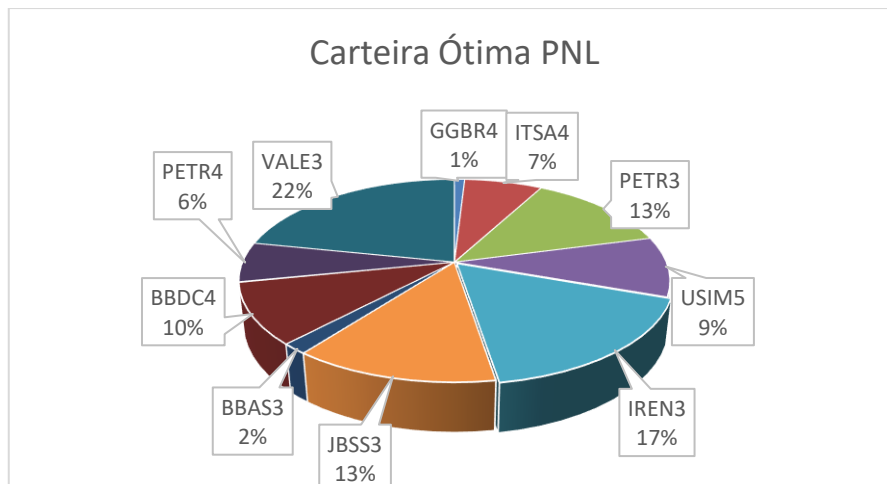
A carteira ótima gerada pelo modelo de PNL maximizou a relação retorno/risco. Para compor esta carteira foram selecionadas ações GGBR4, ITSA4, PETR3, USIM5, LREN3, JBSS3, BBAS3, BBDC4 e VALE3, ocasionando em uma relação rentabilidade/risco de 0,133% ao dia, sendo 0,1638% a rentabilidade média da carteira e 1,2336 o desvio padrão. A participação de cada ativo está representada na Tabela 4 e Figura 4 abaixo.

Tabela 4 - Portfólio ótimo calculado por Programação Não Linear

Ação	Participação na Carteira (%)	Custo Reduzido
BBSE3	0,00%	-0,0155
BRFS3	0,00%	-0,0655
CIEL3	0,00%	-0,1752
GGBR4	0,92%	0,0000
ITSA4	6,95%	0,0000
KROT3	0,00%	-0,0968
PETR3	13,02%	0,0000
UGPA3	0,00%	-0,1246
USIM5	9,53%	0,0000
CCR03.	0,00%	-0,0807
LREN3	17,01%	0,0000
JBSS3	12,99%	0,0000
LAME4	0,00%	-0,0715
ABEV3	0,00%	-0,0136
BBAS3	1,66%	0,0000
BBDC4	9,72%	0,0000
ITUB4	0,09%	0,0000
PETR4	6,32%	0,0000
VALE3	21,79%	0,0000
Função Objetivo		0,133%

Fonte: Elaboração própria

Figura 2 - Carteira ótima pelo método PNL.



Fonte: Elaboração própria

6. Conclusão

Este trabalho objetivou comparar as técnicas de PL e PNL para otimização de carteira de investimentos. Para tanto utilizou-se um histórico de dois anos das ações mais negociadas da *BOVESPA*. O equacionamento matemático construído à luz das PL teve por objetivo a maximização do rendimento, enquanto o modelo de PNL visou a maximização da relação retorno/risco.

Com relação ao retorno esperado da carteira, a PL mostrou-se ligeiramente melhor, com o valor de 0,1646% ao dia, frente aos 0,1638% encontrados pela PNL. Todavia, o fator risco esboça importância crucial na decisão de investimentos e, neste contexto, o modelo de PNL apresentou um risco de 1,2336, consideravelmente menor que o exibido pelo PL, de 2,3234. Isto deve-se, entre outros motivos, pelo fato do segundo modelo recomendar uma carteira mais diversificada, com 9 ativos, em contraste com a PL, que recomendou apenas 3 ativos.

Portanto, quando se busca uma carteira mais robusta e menos susceptível a riscos, a PNL exhibe resultados melhores do que se comparada a PL. Entretanto vale ressaltar que a PL permite ao decisor aprofundar suas análises, uma vez que possui a possibilidade de uma análise de sensibilidade mais aprimorada e de fácil entendimento.

Por fim, sugere-se como futuras pesquisas analisar estas ferramentas de otimização em cenários mais voláteis, tais como em operações de *trade*. Além disto, o estudo da PNL aplicada em outros mercados, como a bolsa de Nova Iorque, ou em ações da *Small Caps* da bolsa brasileira são um campo de estudo ainda latente.

7. Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, FAPEMIG e CNPq pelo apoio fornecido a esta pesquisa.

REFERÊNCIAS

ACKOFF, Russell L.; SASIENI, Maurice W. **Pesquisa Operacional**. 3.ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1977.

BELFIORE, P.; FÁVERO, L. P. **Pesquisa operacional para cursos de engenharia**. Elsevier Brasil, 2013.

BRESSAN, Glaucia Maria; ZEBEDIFF, Nayara Bibiano. **Modelagem Matemática e Resolução de Problemas de Gerenciamento da Produção Utilizando Programação Linear**. C.q.d.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática, [s.l.], v. 5, p.85-109, 2015.

CORRAR, Luiz J; THEÓFILO, Carlos R et. all; **Pesquisa Operacional para Decisão em Contabilidade e Administração**. São Paulo, Atlas, 2004.

COUTINHO, João Delocco Villa; SILVA, Mariana Império Meyrelles Thomaz da. **Aplicação de Programação Linear para o Cálculo da Compra de Insumos para Rações de Vacas**. 2013. 86 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia de Produção, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. McGraw Hill Brasil, 2013.

MANKIW, N. G. **Introdução à economia**. Cengage Learning, 2009.

MARINS, F. A. S. **Introdução a pesquisa operacional**. São Paulo: Cultura Acadêmica: Universidade Estadual Paulista, Pró-reitora de Graduação, 2011.

MARTÍN, Q. M. **Investigación Operativa**. Madrid: Prentice Hall, 2003.

MINEIRO, Andréa Aparecida da Costa Mineiro. **Aplicação de Programação Não-Linear como ferramenta de auxílio à tomada de decisão na gestão de um clube de investimento**. Itajubá: UNIFEI, 2007. 105 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Eng. De Produção, Univesidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2007.

MONTEVECHI, J. B. **Curso de Pesquisa Operacional**. UNIFEI. 2016.

PESSOA, L.; ALVES, J. M. Sistema de otimização do balanço de massas para alimentação de alto-fornos: um estudo de caso. Revista Eletrônica Produção & Engenharia, v. 4, n. 1, Jan-Jun. 2013.

PRADO, D. Programação Linear. Belo Horizonte: EDG, 1999.

RAYMUNDO, Emerson Augusto; GONÇALVES, Lucas Willian Nogueira; RIBEIRO, Natalia Silva. PESQUISA OPERACIONAL NA TOMADA DE DECISÃO: MODELO DE OTIMIZAÇÃO DE PRODUÇÃO E MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO. Revista de Gestão & Tecnologia, [S.l.], v. 3, n. 1, abr. 2015.

ROSS, S. A.; WESTERFIELD, R. W.; JORDAN, B. D. **Administração financeira**. 8ª edição. 2008.

SANTOS, M. D. et al.. Proposta de Otimização do Mix de Produção Utilizando o Método Simplex: Um Estudo de Caso de uma Confeção de Moda Íntima do Município de Cordeiro RJ. Anais do IV Simpósio de Engenharia de Produção: Lean Cost Management como filosofia global de otimização em organizações. Recife (PE): Fev, 2016.